Formalisme quantique et préférences indéterminées en théorie de la décision

Hervé Zwirn
CMLA (UMR 8536 CNRS / ENS Cachan) & IHPST (UMR 8590 CNRS / Paris 1 / ENS Ulm)
herve.zwirn@m4x.org

Décembre 2006

Résumé

Dans cet article, nous proposons d'utiliser le formalisme de la mécanique quantique pour décrire et expliquer le comportement dit "anormal" d'agents dans certains contextes de décision ou de choix. L'idée de base consiste à postuler que les préférences de ces agents sont indéterminées (au sens quantique du terme) avant que le choix ne soit fait ou que la décision ne soit prise. L'état d'un agent avant la décision est représenté par une superposition de préférences potentielles. La décision est assimilée à une mesure de l'état de l'agent et conduit à une projection de l'état sur une des préférences particulières. On considère donc que l'incertitude sur les préférences n'est pas liée à une information incomplète mais à une indétermination essentielle. Nous explorons les conséquences de ces hypothèses sur les concepts usuels de la théorie de la décision et appliquons le formalisme au problème de l'effet dit de "*framing*".

1 Introduction

Il est aujourd'hui bien connu que les acteurs en situation de choix ou de décision se comportent quelquefois de manière apparemment irrationnelle, constat que l'on qualifie d'anomalies comportementales[1]. Ces anomalies peuvent se manifester de différentes manières. Confronté aux mêmes possibilités, un agent peut, par exemple, faire un choix différent selon la manière dont le choix lui est présenté, ou selon le contexte dans lequel il est placé alors que les différents contextes semblent équivalents quant à ce choix. Il est également possible qu'ayant à faire plusieurs choix successifs indépendants, l'agent aboutisse à des résultats dépendant de l'ordre dans lequel ces choix sont faits. Les approches usuelles rencontrent des difficultés à rendre compte de ces anomalies sans recourir à des arguments qui semblent souvent ad hoc.

L'approche bayésienne traditionnelle, suggérée par Harsanyi, pour modéliser l'information incomplète, consiste à adopter une distribution de probabilité a priori sur les types des agents (un type étant censé représenter toute l'information pertinente relative à l'agent dans la situation de décision considérée), à faire un tirage au sort des types et à informer chaque agent de son propre type. Il en résulte que l'incertitude sur le type d'un agent reflète principalement l'information incomplète qu'en ont les autres agents. Ceci provient du fait qu'un type est parfaitement déterminé et représente l'ensemble complet et bien défini des caractéristiques d'un agent. Chaque agent connaît son propre type mais ne dispose que d'une distribution de probabilité sur le type des autres agents. C'est sur ce point que nous nous écartons de l'approche traditionnelle en ce que nous supposons qu'au-delà d'un manque d'information,

[1] Kahneman D. and A. Tversky, 2000. *Choice, Values and Frames*, Cambridge : Cambridge University Press.

l'incertitude sur le type d'un agent peut provenir du fait que celui-ci n'est pas complètement déterminé avant que l'agent n'ait fait son choix ou pris sa décision. L'état de l'agent est alors une superposition de différents types au sens où le formalisme quantique l'autorise. C'est alors seulement au moment de la décision, que nous identifions à l'équivalent d'une mesure, que la préférence se détermine. Cette idée est conforme avec ce que suggèrent Tversky et Simonson[2] selon lesquels :
"*Il y a un nombre croissant d'indices qui confortent une position alternative selon laquelle les préférences sont souvent construites – pas seulement révélées – au moment du processus de choix. Ces constructions dépendent du cadre dans lequel le problème est posé, de la méthode d'obtention des résultats et du contexte du choix*".
Ce point de vue semble assez en accord avec les observations selon lesquelles des agents (même a priori hautement rationnels) peuvent se comporter différemment dans des situations équivalentes qui ne diffèrent que par des facteurs apparemment non pertinents (comme l'environnement ou des événements préalables n'ayant aucun lien avec la situation considérée)[3].

2 Le cadre formel

Dans cette partie, nous présentons le formalisme que nous utiliserons ainsi que son interprétation. Nous emprunterons à la mécanique quantique une partie des outils qui ont été développés pour modéliser le monde atomique. Le formalisme quantique repose en grande partie sur le modèle d'espace de Hilbert qui est la structure naturelle pour exprimer l'état d'un système sous forme d'un vecteur. Ce modèle est complété en physique par une équation dynamique décrivant la manière dont l'état évolue dans le temps, c'est l'équation de Schrödinger, mais nous n'en aurons pas d'équivalent dans le cadre proposé ici. Nous utiliserons donc uniquement le formalisme des espaces de Hilbert auquel nous associerons quelques règles supplémentaires, comme celle qui régit la mesure. Il est par ailleurs connu que ce formalisme peut être considéré comme une généralisation du calcul des probabilités quand on veut y introduire des dépendances contextuelles. Le fait qu'il soit adéquat pour décrire les observations mentionnées plus haut n'est donc pas si surprenant, mais nous n'aurons pas l'occasion d'approfondir cette remarque de manière plus détaillée car cela nécessiterait des développements techniques n'ayant pas leur place ici[4]. Le lecteur trouvera en appendice, les éléments de mécanique quantique suffisants pour comprendre le cadre formel que nous allons développer[5].

2.1 La notion d'état et de superposition

Ce que nous cherchons à décrire, c'est le comportement de choix d'un agent dans une situation de décision, ce que nous interprétons comme une révélation de ses préférences. Dans cet article, nous nous limiterons aux situations où un choix doit être fait de manière non répétitive et sans prise en compte de notion de stratégie. Nous excluons donc les situations de jeux où

[2] Tversky A. et Simonson I., 1993. «Context-Dependent Preferences». *Management Sciences* 39 : 85-117.
[3] Voir l'avertissement à la fin de l'article. Une version anglaise préliminaire de ce papier est disponible : Lambert Ariane, Zamir Shmuel et Zwirn Hervé, 2006. *Type Indeterminacy: A Model of the KT(Kahneman–Tversky)-Man.,* arXiv:physics/0604166 v1 20 Apr 2006.
[4] Le lecteur intéressé pourra éventuellement se reporter Mackey G.W., 1963. *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*. New York: Benjamin.
[5] Pour une présentation complète du formalisme quantique voir par exemple Cohen-Tannoudji C., Diu B., et Laloe F., 1973. *Mecanique Quantique.*, Paris : Herman Editeur des Sciences et des Arts ou l'ouvrage récent de Basdevant JL., 2006. *12 leçons de mécanique quantique.* Paris : Vuibert.

un joueur doit répondre de manière itérée à un choix du joueur adverse. Ces situations, plus complexes, demandent des développements qui font l'objet de travaux en cours. Des exemples de situations qui entrent dans le cadre du présent article sont :

- choisir entre acheter un ordinateur de marque M_1 ou M_2 ou M_3
- choisir d'investir ou pas dans un projet
- choisir entre un gain certain de 100 € ou un pari donnant 250 € avec une probabilité 0,5 et 0 € avec une probabilité 0,5
- préférer manger une banane, une pomme ou une poire
- Choisir de coopérer ou de dénoncer dans le dilemme du prisonnier

Dans le reste de l'article, en dehors des cas explicites de situations tirées de la littérature et mettant en évidence des anomalies comportementales, les exemples que nous donnerons pour illustrer notre propos seront toujours élémentaires. Il va de soi que cela n'affecte en rien la possibilité d'utiliser le formalisme dans des cas plus sophistiqués. Un agent est représenté par un état qui englobe tout ce qu'on peut savoir de son comportement attendu dans la situation considérée. Dans le cas classique le plus simple, l'état pourrait être directement la désignation du choix qu'il fera en fonction des différentes possibilités. Dans ce cas, l'état représente la préférence qu'a l'agent pour tel ou tel choix. Par exemple, si la situation de décision consiste à choisir entre une banane, une pomme ou une poire, l'état de l'agent pourrait être "poire". Ceci signifierait que, confronté au choix en question, l'agent choisira la poire avec certitude. Une situation plus intéressante est justement celle modélisée par le formalisme bayesien dans lequel chaque possibilité possède une probabilité d'être choisie. L'état pourra alors être "banane avec une probabilité 0,3, poire avec une probabilité 0,2 et pomme avec une probabilité 0,5". Mais il est également possible que l'état contienne un ordre sur les préférences comme "poire, banane, pomme" signifiant que l'agent préférera une poire à tout autre fruit mais qu'entre une banane et une pomme il choisira une banane.

Par analogie avec le cas de la mécanique quantique, nous représenterons mathématiquement l'état de l'agent comme un vecteur dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ et le noterons $|\psi\rangle$. Le lien entre l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$ et la situation de décision sera précisé plus bas. A ce stade, ce que représente exactement l'état $|\psi\rangle$ est laissé ouvert. La connaissance de l'état de l'agent doit, en principe, autoriser à faire des prédictions sur ce qu'il fera lorsqu'il sera confronté à une certaine situation de décision. Nous verrons que l'interprétation qu'il est possible d'en donner peut varier selon le contexte et selon la modélisation qu'on souhaite faire. Selon le principe de superposition, si $|\psi_1\rangle$ et $|\psi_2\rangle$ sont deux états possibles de l'agent, toute combinaison linéaire $\lambda_1|\psi_1\rangle + \lambda_2|\psi_2\rangle$ avec $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 = 1$ est également un état possible. Ceci signifie déjà que, même dans le cas de l'interprétation la plus simple que nous avons mentionnée plus haut, à savoir celle où l'état représente directement le choix que fera l'agent, il est possible d'obtenir par combinaison linéaire de tels états, des états (dits superposés) qui ne s'interprètent plus classiquement. Ce sont des superpositions par exemple d'un état qui représente le choix certain d'une pomme avec un état qui représente un choix certain d'une banane. De tels états, impossibles à concevoir dans un cadre classique et qu'il ne faut pas tenter de "comprendre", sont l'essence même de la différence entre les formalismes habituels et celui que nous proposons.

2.2 La notion d'observable et de mesure

Une mesure est une opération menée sur le système et qui produit un résultat. Typiquement, en physique, une mesure est effectuée au moyen d'un appareil qui est censé permettre de déterminer la valeur d'une grandeur physique, comme une position, une impulsion ou un spin.

La caractéristique d'une opération de mesure est que, si celle-ci est répétée immédiatement après, sans qu'une mesure différente ait été faite, elle redonnera le même résultat. A toute grandeur physique du système est associée une observable dont les valeurs propres donnent les seuls résultats possibles qu'il est possible d'obtenir lors d'une mesure de cette grandeur[6]. Après une mesure ayant donné une des valeurs propres comme résultat, le vecteur d'état du système est projeté sur le sous-espace propre associé à cette valeur propre. Lorsque la valeur propre n'est pas dégénérée, le vecteur d'état devient donc égal au vecteur propre associé à la valeur propre obtenue lors de la mesure. C'est ce mécanisme que nous allons utiliser pour modéliser une situation dans laquelle un agent est confronté à un choix entre plusieurs alternatives, ce que nous appellerons une "situation de décision".

2.3 Situation de décision unique

Une situation de décision est définie par l'ensemble des alternatives entre lesquelles l'agent doit choisir. C'est la situation qui déterminera l'espace de Hilbert associé et sa dimensionnalité. On choisira l'espace correspondant de manière à ce que sa dimension soit au moins égale au nombre de choix possibles (supérieure, si on souhaite utiliser des valeurs propres dégénérées comme nous le verrons plus loin). Nous assimilerons une telle situation à une mesure en identifiant le choix fait à la valeur produite par la mesure. Le processus du choix est donc semblable à la mesure d'une grandeur. Une observable A sera associée à chaque situation de décision[7]. Si n choix différents sont proposés, les vecteurs propres de A seront conventionnellement notés $|1\rangle$, …, $|n\rangle$ et seront associés aux valeurs propres 1 ,…, n avec la convention selon laquelle obtenir la valeur propre j correspond à avoir fait le choix j dans la liste des choix possibles. Comme dans cette hypothèse aucune des valeurs propres n'est dégénérées, $\{|1\rangle, \ldots, |n\rangle\}$ est l'unique base orthonormée de $\mathcal{H}$ formée de vecteurs propres de A. L'état de l'agent peut donc être écrit sur cette base :

$$|\psi\rangle = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k |k\rangle \text{ avec } \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|^2 = 1$$

Selon le principe de réduction, la probabilité que l'agent dans l'état $|\psi\rangle$ choisisse l'alternative i (c'est-à-dire qu'il obtienne la valeur propre i) est :

$$|\langle i|\psi\rangle|^2 = |\lambda_i|^2$$

Immédiatement après la mesure, l'état de l'agent est projeté sur l'état propre associé à la valeur propre i, c'est à dire $|i\rangle$. Si on reconduit la même situation de décision en demandant à l'agent de se prononcer à nouveau, il reconduira avec certitude le choix précédent en optant pour l'alternative i.

Dans ce cas simple, notre formalisme est équivalent au formalisme probabiliste usuel dans lequel on attribuerait des probabilités aux différents choix possibles de l'agent. Les prédictions obtenues à partir de l'état $|\psi\rangle = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k |k\rangle$ sont identiques à celles qu'on obtiendrait à partir d'un état classique décrit comme le fait que chaque choix possible k a la probabilité $|\lambda_k|^2$ d'être obtenu.

[6] Se référer à l'appendice sur les éléments de mécanique quantique pour plus de détails à ce sujet.
[7] Par abus de langage, nous appellerons du même nom la situation de décision et l'observable associée. Ainsi à la situation de décision A sera associée l'observable A (qu'il aurait fallu en toute rigueur noter Â).

2.4 Situations de décision multiples

Situations de décisions qui commutent

Supposons que l'agent soit confronté à deux situations de décision (par exemple, le choix entre une pomme et une banane d'une part, et celui entre passer ses vacances à la mer ou à la montagne d'autre part). Soient A et B les observables associées respectivement à chacune des situations. Supposons d'abord que les deux situations offrent le même nombre n d'alternatives, ce qui permettra de supposer que les valeurs propres ne sont pas dégénérées. Si A et B commutent, il existe une base de l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$ formée de vecteurs propres communs à A et B. Notons $|i\rangle$ ces vecteurs de base. On a alors :

$$A|i\rangle = i_A |i\rangle \text{ et } B|i\rangle = i_B |i\rangle \text{ avec } i_A \text{ et } i_B \in \{1,...,n\}$$

Mais compte tenu de notre convention selon laquelle obtenir la valeur propre i lors d'une mesure de A signifie obtenir le choix de rang i dans la liste des choix possibles de A, on peut toujours ordonner la liste des choix de A et B de telle manière que

$$A|i\rangle = B|i\rangle = i|i\rangle$$

Ce qui signifie que A=B. Tout vecteur de l'espace de Hilbert peut être écrit sur la base et l'état de l'agent sera :

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i |i\rangle \text{ avec } \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2 = 1$$

Si on mesure A en premier[8], la probabilité d'obtenir la valeur propre i est :

$$p_A(i) = |\lambda_i|^2$$

On pourra noter ce choix $i(A)$ pour éviter toute ambiguïté. Ainsi $i(A)$ est le choix de rang i de la situation de décision A alors que $i(B)$ est le choix de même rang i de la situation de décision B. Ces deux choix sont associés à la même valeur propre.

La probabilité $p_A(i)$ d'obtenir la valeur propre i lors de la mesure de A en premier est la même que la probabilité $p_B(i)$ d'obtenir la valeur propre i, donc le choix $i(B)$, si on mesure B en premier.

Supposons qu'on ait mesuré A et obtenu le choix $i(A)$. Le vecteur d'état de l'agent après la mesure sera $|i\rangle$ et la probabilité d'obtenir le choix $j(B)$ lors d'une mesure suivante de B sera $|\langle j\ |i\rangle|^2 = \delta(j,i\ )$ (qui vaut 1 si $j = i$ et 0 autrement). On voit donc que dans ce cas très simple, il y a une corrélation totale entre les choix de la situation A et ceux de la situation B. Le choix de rang i étant fait pour A, on est sûr d'obtenir le choix de rang si pour B (et vice versa), ce qui découle directement du fait que A=B.

Afin de relaxer cette contrainte, il est nécessaire d'utiliser des valeurs propres dégénérées, ce qui nous permettra également de traiter le cas où le nombre de choix de chacune des situations n'est pas le même. Dans ce cas nous noterons :

$$A|i\rangle = i_A |i\rangle \text{ et } B|i\rangle = i_B |i\rangle$$

de telle sorte que i_A est la valeur propre de A associée au vecteur propre $|i\rangle$ et sachant qu'une valeur propre de A sera dégénérée si, pour au moins un couple (i, j) avec $i \neq j$, on a $i_A = j_A$

[8] Par abus de langage nous dirons : "mesurer A" au lieu de : "effectuer le choix correspondant à la situation de décision à laquelle l'observable A est associée".

(idem pour B). Le nombre de vecteurs propres de A est alors supérieur au nombre d'alternatives possibles de la situation de décision associée à A[9].
Dans ce cas, la probabilité d'obtenir le choix $i(A)$, si on mesure A en premier, devient :

$$p_A(i) = \sum_{j:j_A=i} |\lambda_j|^2$$

Si on mesure B en premier, la probabilité d'obtenir le choix $j(B)$ est :

$$p_B(j) = \sum_{k:k_B=j} |\lambda_k|^2$$

Après avoir obtenu $j(B)$, l'état de l'agent devient :

$$|\psi_j\rangle = \frac{1}{\sqrt{\sum_{k:k_B=j} |\lambda_k|^2}} \sum_{k:k_B=j} \lambda_k |k\rangle$$

Si on mesure ensuite A pour un agent dans cet état, la probabilité d'obtenir $i(A)$ est[10] :

$$p_{AB}(i|j) = \frac{1}{\sum_{k:k_B=j} |\lambda_k|^2} \sum_{k:k_B=j \text{ et } k_A=i} |\lambda_k|^2$$

donc la probabilité d'obtenir i quand on mesure A après avoir mesuré B est :

$$p_{AB}(i) = \sum_j p_B(j) p_{AB}(i|j) = \sum_j \left[\sum_{k:k_B=j} |\lambda_k|^2 \frac{1}{\sum_{k:k_B=j} |\lambda_k|^2} \sum_{k:k_B=j \text{ and } k_A=i} |\lambda_k|^2 \right]$$

$$= \sum_j \sum_{k:k_B=j \text{ and } k_A=i} |\lambda_k|^2 = \sum_{k:k_A=i} |\lambda_k|^2 = p_A(i)$$

On constate donc que $p_{AB}(i) = p_A(i)$ ce qui signifie que mesurer B avant A ne change rien à la mesure de A (idem pour B). Lorsque les observables associées à deux situation de décision commutent, on peut mesurer l'une et l'autre indépendamment. La mesure de l'une n'influe pas sur la mesure de l'autre. On peut également mesurer les deux et déterminer la probabilité conjointe $p_{AB}(i \wedge j) = \sum_{k:k_A=i \text{ and } k_B=j} |\lambda_k|^2$. Ceci signifie que l'événement consistant à mesurer i sur A et j sur B est bien défini. On peut donc fusionner les deux situations et définir un espace de probabilité sur les couples (i, j). De plus, la formule de probabilité conditionnelle $p_{AB}(i \wedge j) = p_A(i) p_B(j | i)$ s'applique. L'introduction de valeurs propres dégénérées permet donc de s'affranchir de la contrainte de corrélation totale (et même d'identité) que nous avions constatée initialement et de traiter le cadre général dans lequel toutes les combinaisons de choix entre A et B sont possibles.

Notre formalisme dans le cas de situations de décision qui commutent reproduit donc les résultats du formalisme bayesien classique dans lequel on se donne une distribution de

[9] Le cas non dégénéré correspond à une situation à n alternatives et où $i_A = i \quad \forall i \in \{1, ..., n\}$.

[10] On note $p_{AB}(i|j)$ la probabilité d'obtenir i en mesurant A quand on a obtenu j en mesurant d'abord B.

probabilité sur les choix conjoints des situations. Ce constat, nécessaire, montre la cohérence de l'extension que nous proposons vis-à-vis de sa limite classique.

Situations de décisions qui ne commutent pas

C'est dans le cas de situation de décision qui ne commutent pas que le formalisme quantique apporte des prédictions nouvelles par rapport au formalisme classique. Comme nous allons le voir, les différences proviennent de termes d'interférence dans le calcul des probabilités. Supposons que nous sommes dans le cas de deux situations de décision A et B associées à des observables A et B qui ne commutent pas et que ces observables ont le même nombre n de valeurs propres non dégénérées[11] (que nous pouvons donc noter 1,2, …, n). Contrairement au cas précédent, il n'existe plus de base de vecteurs propres communs à A et B. Notons donc $\{|1_A\rangle, |2_A\rangle, ..., |n_A\rangle\}$ la base de vecteurs propres de A, le vecteur propre $|i_A\rangle$ étant associé à la valeur propre i (idem pour B). L'état initial de l'agent peut s'écrire sur chacune de ces bases :

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i |i_A\rangle = \sum_{j=1}^{n} \nu_j |j_B\rangle \text{ avec } \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2 = 1 \text{ et } \sum_{j=1}^{n} |\nu_j|^2 = 1$$

On peut écrire les vecteurs propres de B sur la base de vecteurs propres de A :

$$|j_B\rangle = \sum_{i=1}^{n} \mu_{ij} |i_A\rangle$$

Donc :

$$|\psi\rangle = \sum_{j=1}^{n} \nu_j |j_B\rangle = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \nu_j \mu_{ij} |i_A\rangle$$

Si l'agent se trouve en premier dans la situation de décision A, il choisira le choix de rang i avec la probabilité :

$$p_A(i) = \left| \sum_{j=1}^{n} \nu_j \mu_{ij} \right|^2$$

Si l'agent se trouve d'abord dans la situation de décision B, il choisira le choix de rang j avec la probabilité $|\nu_j|^2$ et son état sera projeté sur le vecteur $|j_B\rangle$. La probabilité que, confronté ensuite à la situation de décision A, il choisisse alors le choix de rand i est $|\mu_{ij}|^2$. Il est résulte que la probabilité que l'agent, d'abord soumis à la situation de décision B, choisisse ensuite le choix de rang i dans la situation A est :

$$p_{AB}(i) = \sum_{j=1}^{n} |\nu_j|^2 |\mu_{ij}|^2 = \sum_{j=1}^{n} |\nu_j \mu_{ij}|^2$$

qui est en général différent de $p_A(i)$ qui contient des termes croisés (termes d'interférence) :

$$p_A(i) = \left| \sum_{j=1}^{n} \nu_j \mu_{ij} \right|^2 = p_{AB}(i) + \sum_{j \neq j'} \nu_{j'}^* \mu_{ij}^* \nu_j \mu_{ij'}$$

Il en résulte que le choix que fera l'agent dans la situation A sera en général différent selon qu'il a préalablement été confronté à la situation B ou pas. De plus, dans le cas de deux observables qui ne commutent pas, on sait qu'il n'est pas possible de considérer que les

[11] Dans ce cas, l'introduction de valeurs propres dégénérées, nécessaire quand le nombre de choix possibles n'est pas le même pour les deux situations, ne change rien d'essentiel aux résultats que nous allons montrer. En revanche, elle complique la notation à utiliser.

résultats sont simultanément définis pour les deux (au sens où une mesure de l'une ou de l'autre redonnera toujours le même résultat). Il en résulte également que la formule de probabilité conditionnelle $p_{AB}(i \wedge j) = p_A(i) p_B(j \mid i)$ ne s'applique plus comme il est facile de le vérifier puisque :

$$\left| \sum_{j=1}^{n} \nu_j \mu_{ij} \right|^2 = p_A(i) \neq \sum_{j=1}^{n} p_B(j) p_A(i \mid j) = \sum_{j=1}^{n} \left| \nu_j \mu_{ij} \right|^2$$

3 Deux exemples d'application

Donnons maintenant deux exemples dans lesquels le formalisme présenté peut apporter une modélisation permettant d'expliquer de manière naturelle un résultat a priori surprenant. Le premier exemple est une expérience fictive que nous proposons dans le but de tester nos hypothèses. Si la possibilité pour un agent d'être dans un état d'esprit superposé (représentant une véritable indétermination de ses préférences) est réelle, alors une expérience du type de celle qui est présentée ci-dessous devrait donner un résultat non conforme à ce que l'intuition classique nous dicte. Faire une véritable expérience sur un mode similaire à celui, très schématique, que nous proposons, et obtenir un tel résultat serait un indice appréciable pour conforter notre modèle. Le deuxième exemple est tiré de la littérature et concerne le célèbre problème du *framing* pour lequel nous proposons une nouvelle explication.

3.1 Superposition d'états d'esprit

Comme nous allons le voir, cette expérience est une transposition de l'expérience des trous d'Young au contexte de la décision[12].

Le dispositif expérimental

Considérons deux populations identiques d'agents I et II. Supposons que chacun des membres de chaque population soit invité à jouer au dilemme du prisonnier[13] contre un joueur caché. Avant de jouer, les agents de la population I doivent répondre individuellement à une question par OUI ou NON. Le détail de la question importe peu pour les besoins de l'argument sauf que la question porte sur une caractéristique typique en rapport avec le jeu. Par exemple, la question peut être interprétée comme révélant le fait que l'agent est plutôt altruiste ou plutôt égoïste. Les agents de la population II eux, jouent directement sans avoir à répondre à la question. Considérons tout d'abord la population I. Supposons que nous ayons une proportion α de réponses OUI et $(1-\alpha)$ de réponses NON à la question. Les agents jouent alors au dilemme du prisonnier. Supposons que nous ayons une proportion β d'agents ayant répondu OUI qui coopèrent (une proportion $(1-\beta)$ dénonce). De même, supposons que nous ayons une proportion γ d'agents ayant répondu NON qui coopèrent (une proportion $(1-\gamma)$ dénonce). La proportion d'agents de la population I qui coopèrent sera donc :

$$P_I(\text{coop}) = \alpha\beta + (1-\alpha)\gamma$$

Considérons maintenant la population II pour laquelle les agents ont joué directement. On trouve une proportion d'agents qui coopèrent égale à $P_{II}(\text{coop})$. On s'attend bien sûr à ce que $P_{II}(\text{coop}) = P_I(\text{coop})$. Plusieurs raisons font penser cela. La plus simple est que les deux populations sont identiques et qu'en conséquence, elles doivent produire les mêmes résultats à

[12] Voir l'annexe 1 en fin d'article.

[13] Voir l'annexe 2 en fin d'article.

moins qu'un événement les ait différenciées avant que leurs agents jouent. Or, le simple fait de répondre à une question sur leur caractère ne peut ni avoir transformé les agents, ni les inciter à jouer différemment. Un raisonnement plus détaillé aboutit à la même conclusion. Si on note $p_{II}(A)$ la proportion d'agents altruistes et $p_{II}(E)$ la proportion d'agents égoïstes de la population II, on peut écrire en suivant la loi des probabilités conditionnelles :

$$P_{II}(coop) = p_{II}(A)p(coop|A) + p_{II}(E)p(coop|E)$$

Mais la population II est identique à la population I. Par conséquent, même si on ne l'a pas mesurée, il est naturel de supposer que la proportion d'agents altruistes (respectivement égoïstes) de la population II est identique à celle de la population I pour laquelle la mesure a été faite (un agent est altruiste ou égoïste indépendamment du fait qu'on lui ai posé la question ou pas). Donc :

$$p_{II}(A) = \alpha; \;\; p_{II}(E) = (1-\alpha);$$

De la même manière, il n'y a aucune raison de supposer que la proportion d'agents altruistes qui coopèrent (respectivement qui dénoncent) soit différente dans les deux populations. Il en résulte donc que :

$$p(coop|A) = \beta; \;\; p(coop|E) = \gamma$$

Donc :

$$P_{II}(coop) = p_{II}(A)p(coop|A) + p_{II}(E)p(coop|E) = \alpha\beta + (1-\alpha)\gamma = P_I(coop)$$

La possibilité d'un résultat surprenant

Supposons maintenant que l'expérience effectuée, on trouve $P_{II}(coop)$ significativement différent de $P_I(coop)$. Quelle explication pourra-t-on donner ? Dans un cadre classique, la formule de probabilités conditionnelles ci-dessus s'applique obligatoirement. Si elle donne un résultat différent pour les deux populations, c'est que les proportions qui entrent en jeu ne sont pas les mêmes. Il n'est pas raisonnable de supposer que les proportions d'agents altruistes (respectivement égoïstes) qui coopèrent (respectivement qui dénoncent) sont différentes dans les deux populations. On voit mal en effet la raison pour laquelle un agent altruiste ayant répondu à une question jouerait différemment d'un agent altruiste n'ayant répondu à aucune question. Il faut donc que ce soit les proportions d'agents altruistes et égoïstes qui aient changé. L'explication en serait que le fait d'avoir demandé au agents s'ils étaient ou pas altruistes a conduit certains d'entre eux à changer leur nature : certains altruistes sont devenus égoïstes et certains égoïstes sont devenus altruistes. Cette explication, bien que théoriquement possible, semble cependant bien étrange. S'il suffit d'être interrogé sur ses préférences ou son caractère pour en changer, on peut douter de la stabilité de ces caractéristiques et partant, de la fiabilité du modèle tout entier qui repose sur leur prise en compte.

L'explication dans le cadre du formalisme que nous avons présenté est en revanche beaucoup plus naturelle. Avant qu'on leur pose la question (population I) ou qu'ils jouent au dilemme du prisonnier (population II) les agents sont dans un état superposé du type :

$$|\psi\rangle = \lambda_1|A\rangle + \lambda_2|E\rangle$$

où on note $|A\rangle$ un état altruiste, $|E\rangle$ un état égoïste et où les coefficients λ sont les mêmes au départ pour les deux populations (c'est l'hypothèse d'identité des deux populations). Ceci revient à considérer que le questionnaire est associé à une observable dont les vecteurs propres sont $|A\rangle$ et $|E\rangle$. La situation de décision du dilemme est également associée à une observable dont les vecteurs propres sont $|coop\rangle$ et $|den\rangle$. Supposons que ces deux observables ne commutent pas. Dans ce cas, il n'y a pas de base de vecteurs propres communs et on peut écrire une matrice de changement de base sous la forme :

$$|A\rangle = \mu_{11}|coop\rangle + \mu_{12}|den\rangle$$
$$|E\rangle = \mu_{21}|coop\rangle + \mu_{22}|den\rangle$$

D'où :

$$|\psi\rangle = \lambda_1|A\rangle + \lambda_2|E\rangle = (\lambda_1\mu_{11} + \lambda_2\mu_{21})|coop\rangle + (\lambda_1\mu_{12} + \lambda_2\mu_{22})|den\rangle$$

Les agents de la population II jouent directement au dilemme du prisonnier. On a donc :

$$P_{II}(coop) = |(\lambda_1\mu_{11} + \lambda_2\mu_{21})|^2$$

Les agents de la population I commencent par répondre au questionnaire puis joue au dilemme du prisonnier. Donc :

$$P_I(coop) = P_I(\text{A})P_I(coop|\text{A}) + P_I(\text{E})P_I(coop|\text{E}) = |\lambda_1|^2|\mu_{11}|^2 + |\lambda_2|^2|\mu_{21}|^2$$

On voit donc qu'en général $P_{II}(coop) \neq P_I(coop)$. Ce résultat est très semblable à celui obtenu dans l'expérience des trous d'Young. Si on raisonne de manière classique, on pense que le fait de prendre connaissance ou pas du trou par lequel est passé le photon (l'analogue ici du fait qu'un agent est altruiste ou égoïste) ne changera rien à son trajet (ici, à sa réponse au dilemme du prisonnier). Alors qu'en fait, dans le cas où aucune mesure préalable n'est faite, les deux trajets possibles interfèrent à l'arrivée sur l'écran (ici, les deux comportements interfèrent au moment de la décision). Dans le cas de la population II, des interférences, matérialisées par des termes croisés du type $(\lambda_1\mu_{11})^*(\lambda_2\mu_{21})$, sont présentes alors que ces termes sont détruits par la première mesure (le questionnaire) dans le cas de la population I.

Notre explication n'oblige donc pas à supposer qu'il suffit de répondre à un questionnaire pour changer une préférence préalable déterminée.

3.2 Framing

Kahneman et Tversky définissent l'effet de *framing* à travers une modélisation en deux étapes du processus de décision[14]. La première correspond à la construction d'une représentation de la situation de décision, la seconde au choix proprement dit. Comme ils le disent : *"les véritables objets d'évaluation ne sont ni les objets du monde réel ni les descriptions verbales de ces objets; ce sont les représentations mentales qu'on s'en fait."*. Afin de tenir compte de ce point, nous modéliserons le processus de construction d'une représentation mentale de la même manière que le processus de choix, en le considérant comme l'analogue d'une mesure et en lui associant une observable. Un processus de *framing* sera donc défini comme un ensemble de représentations mentales alternatives associées aux vecteurs propres de l'observable correspondante. Donnons un exemple de ce type de modélisation appliqué à une expérience effectuée par Pruitt[15] et citée par Selten[16].

[14] Kahneman D. and A. Tversky, 2000. op.cité. p. xiv.

[15] Pruitt D.G., 1970. *Reward Structure of Cooperation: the Decomposed Prisoner's Dilemma Game.,* Journal of Personality and Psychology 7: 21-27.

[16] Selten R., 1998. *Features of Experimentally Observed Bounded Rationality.* European Economic Review: 413-436.

Le dilemme du prisonnier décomposé

Une première population se voit présenter le dilemme des prisonniers sous la forme du tableau des gains suivants :

	C	D
C	3 3	0 4
D	4 0	1 1

Les gains du joueur 1 sont indiqués en ligne dans les coins en haut à gauche et ceux du joueur 2 sont indiqués en colonne dans les coins en bas à droite. Ainsi, si le premier joueur joue C et le second joue D, le premier ne touchera rien tandis que le second touchera 4. Si le premier joueur joue D ainsi que le second, ils toucheront 1 tous les deux.

Une deuxième population se voit présenter le même problème sous la forme décomposée :

	Pour moi	Pour lui
C	0	3
D	1	0

Dans ce deuxième cas, le gain est la somme de ce que vous gardez pour vous et de ce que vous obtenez de l'autre joueur. Ainsi, si le premier joueur joue C et le deuxième D, le premier joueur ne garde rien pour lui et donne 3 à l'autre, tandis que le deuxième ne donne rien mais garde 1 pour lui. Les gains seront donc de 0 pour le premier joueur et de 4 pour le second.

Malgré une présentation différente, les deux jeux sont rigoureusement équivalents et, si les agents sont rationnels, on doit obtenir les mêmes résultats dans les deux populations. Cependant, Pruitt a observé que l'on obtient beaucoup plus de coopération dans la deuxième forme que dans la première. Selten propose une explication basée sur la rationalité limitée des agents qui ne seraient pas capables de se rendre dompte de l'équivalence entre les deux jeux.
Nous proposons une explication basée sur le fait que l'état des agents est influencé par la présentation qui est faite et que, même si l'état initial (avant qu'on leur ait présenté le jeu) de tous les agents est identique, les agents qui jouent dans le cas 1 sont dans un état différent de ceux qui jouent dans le cas 2. Appelons A et B les observables associées respectivement à la présentation 1 et 2. Appelons G l'observable associée à la décision elle-même. Les vecteurs propres de G associés aux actions C et D seront notés $|C\rangle$ et $|D\rangle$. Supposons que la présentation 1 induise un choix de représentations mentales[17] (associées à des vecteur propres de A) entre :

$|a_1\rangle$ = le jeu est perçu comme purement ludique

$|a_2\rangle$ = le jeu est perçu comme ayant un enjeu réel

de même, supposons que la présentation 2 induise le choix suivant :

$|b_1\rangle$ = le jeu est perçu comme un test de générosité

$|b_2\rangle$ = le jeu est perçu comme un test d'intelligence

[17] La description des représentations mentales donnée ici est bien sûr arbitraire et ne prétend pas à l'exactitude psychologique. Elle n'est indiquée que pour illustrer notre propos. Le point que nous mettons en avant est surtout la possibilité de l'existence de représentations mentales différentes.

L'état initial d'un agent peut être écrit sur l'une ou l'autre de ces bases :

$$|\psi\rangle = \alpha_1 |a_1\rangle + \alpha_2 |a_2\rangle = \beta_1 |b_1\rangle + \beta_2 |b_2\rangle = \lambda\ |C\rangle + \mu |D\rangle$$

Quelque soit son état initial, un agent, soumis à l'une ou l'autre des présentations, verra son état projeté sur l'un ou l'autre des états propres associés à cette représentation. Supposons que :

$$|a_i\rangle = \gamma_{1i} |C\rangle + \gamma_{2i} |D\rangle \ pour\ i = 1,2$$
$$|b_i\rangle = \delta_{1i} |C\rangle + \delta_{2i} |D\rangle \ pour\ i = 1,2$$

L'effet de *framing* s'exprime alors sous la forme $p_{GA}(C) \neq p_{GB}(C)$, ce qui signifie que la probabilité de choisir l'action C n'est pas la même selon qu'on a été confronté à la situation A ou à la situation B. Or en utilisant les résultats de la partie 2, on peut voir que :

$$p_{GA}(C) = p_G(C) - 2\alpha_1^* \gamma_{11}^* \alpha_2 \gamma_{12}$$
$$p_{GB}(C) = p_G(C) - 2\beta_1^* \delta_{11}^* \beta_2 \delta_{12}$$

où $p_G(C)$ est la probabilité de choisir C dans une hypothétique situation où aucun cadre de présentation n'aurait été utilisé et où l'état de l'agent serait resté l'état initial :

$$p_G(C) = |\lambda|^2$$

L'effet de *framing* sera donc visible dès lors que

$$\alpha_1^* \gamma_{11}^* \alpha_2 \gamma_{12} \neq \beta_1^* \delta_{11}^* \beta_2 \delta_{12}$$

Notre explication repose donc sur l'idée que, initialement dans le même état superposé de C et D, deux agents confrontés à deux représentations différentes du même jeu vont voir leur état projeté sur deux nouveaux états différents. Il en résultera alors une action différente lorsqu'ils auront à choisir entre C et D.

4 Conclusion

Nous avons proposé dans cet article un modèle basé sur le formalisme quantique. Celui-ci permet de retrouver les résultats du formalisme bayesien classique lorsqu'ils sont corrects. Il permet de plus d'expliquer, de manière semble-t-il plus satisfaisante, certaines anomalies comportementales en évitant les hypothèses ad hoc que sont conduits à accepter les auteurs de modèles classiques. Notre hypothèse de base est que les préférences (ou les types) des agents peuvent être indéterminées (c'est-à-dire superposées au sens quantique du terme) avant que la décision ne soit prise. Dans un tel cas, des effets analogues aux interférences qui se produisent en physique, peuvent modifier le comportement classique des agents et expliquer les anomalies constatées. Nous avons proposé une explication du phénomène de *framing*. Elle n'est pas en contradiction avec l'interprétation classique du *framing* qui admet que changer de cadre de présentation influe sur l'état de l'agent. Cependant, le formalisme classique, en supposant que l'état de l'agent est parfaitement déterminé initialement, ne permet pas de modéliser le phénomène du changement. Il est en effet peu satisfaisant de supposer qu'un agent qui est initialement dans un état bien déterminé qui va le conduire à choisir l'action C, va conserver ce choix s'il est confronté à la présentation 1 et va en changer s'il est confronté à la situation 2. L'avantage de l'hypothèse d'indétermination de l'état initial est qu'elle laisse ouverte la possibilité de choix différents au moment même où la décision doit être prise. Nous avons également proposé une expérience pour tester notre modèle. Elle est l'analogue de l'expérience des trous d'Young et permet de mettre clairement en évidence l'effet d'interférences probabilistes dans les choix effectués par les agents de deux populations. L'argument le plus fort en faveur de notre hypothèse concerne la robustesse des préférences.

Expliquer, dans un modèle classique, les résultats différents (si tel est le cas) selon le fait qu'on ait ou pas répondu à une question est toujours possible. Il suffit de supposer que le simple fait d'avoir répondu a abouti à changer les préférences. Mais cette supposition n'est pas satisfaisante car on est en droit d'exiger une certaine robustesse des préférences. Notre modèle donne une raison plus acceptable de ces résultats. Il s'agit maintenant de mettre en place un véritable protocole expérimental permettant de mettre le modèle à l'épreuve. Une suite de ces travaux est en cours. Elle concerne l'extension à plusieurs décisions successives et à la notion de stratégie afin de pouvoir l'utiliser en théorie des jeux.

Annexe 1 : Quelques éléments de mécanique quantique

4.1 Etats et observables

Nous supposerons connu le concept d'espace de Hilbert et les notions mathématiques qui s'y rapportent. En mécanique quantique, l'état d'un système est représenté par un vecteur souvent noté $|\psi\rangle$ (suivant une notation due à Dirac) dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. Selon le principe de superposition, toute combinaison linéaire de vecteurs d'états possibles est elle-même un vecteur d'état possible. Un opérateur hermitien, qu'on appelle une observable, est associé à toute grandeur physique du système.

Théorème 1
Si un opérateur A est hermitien alors :
- les valeurs propres de A sont réelles
- des vecteurs propres correspondants à des valeurs propres distinctes sont orthogonaux
- il existe une base de l'espace de Hilbert formée de vecteurs propres de A

Soient $|v_1\rangle, |v_2\rangle, \ldots, |v_n\rangle$ des vecteurs propres normalisés de A formant une base de $\mathcal{H}$. Ils sont associés à des valeurs propres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ (donc $A|v_i\rangle = \alpha_i|v_i\rangle$). Les valeurs propres peuvent éventuellement être dégénérées, c'est-à-dire que pour un i et un j, $\alpha_i = \alpha_j$. Ceci traduit le fait qu'il y a plusieurs vecteurs propres linéairement indépendants associés à la même valeur propre. Le nombre k_i de ces vecteurs définit le degré de dégénérescence de la valeur propre α_i et donne le nombre de dimensions du sous espace propre qui lui est associé. Dans ce cas, il existe plusieurs bases orthonormales de $\mathcal{H}$ constituées de vecteurs propres de A puisqu'il est possible de remplacer les k_i vecteurs propres associés à la valeur propre dégénérée α_i par k_i combinaisons linéaires indépendantes quelconques de ces mêmes vecteurs. Quand aucune valeur propre n'est dégénérée, il existe une unique base orthonormée de vecteurs propres. Dans ce cas (voir plus bas), A est à elle seule un ensemble complet d'observables qui commutent (qu'on appelle un ECOC).

Théorème 2
Si A et B sont deux observables qui commutent alors il existe une base de l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$ formée de vecteurs propres communs à A et B.

Soit A une observable avec au moins une valeur propre dégénérée. Il n'y a pas unicité de la base de $\mathcal{H}$ formée de vecteurs propres de A. Soit B une observable commutant avec A. Il existe une base de $\mathcal{H}$ formée de vecteurs propres communs. Si cette base est unique alors par définition {A,B} est appelé un ensemble complet d'observables qui commutent (ECOC). Plus généralement, un ensemble d'observables {A,B,…} est appelé "ensemble complet d'observables qui commutent" s'il existe une unique base orthonormée de $\mathcal{H}$ formée de vecteurs propres communs à toutes les observables de l'ensemble.

4.2 La mesure

A chaque propriété physique du système S est associée une observable A. Soient $|v_1\rangle$, $|v_2\rangle$, …, $|v_n\rangle$ les vecteurs propres normalisés de A, associés aux valeurs propres α_1, α_2, …, α_n et formant une base de $\mathcal{H}$. Supposons que S soit dans l'état normalisé $|\psi\rangle$. Une mesure sur S de la propriété associée à A obéit aux règles suivantes (dites règles de réduction du paquet d'ondes ou principe de réduction) :

- le résultat d'une mesure de la propriété physique associée à A sur le système S ne peut être qu'une valeur propre de A
- la probabilité d'obtenir la valeur propre non dégénérée α_i est $P(\alpha_i) = |\langle v_i|\psi\rangle|^2$
- si la valeur propre est dégénérée alors la probabilité est la somme sur les vecteurs propres qui lui sont associés $P(\alpha_i) = \sum_j \left|\langle v_i^j|\psi\rangle\right|^2$
- si la mesure de A sur le système S dans l'état $|\psi\rangle$ a donné le résultat α_i alors, immédiatement après la mesure, le nouvel état du système est la projection normalisée de $|\psi\rangle$ sur le sous espace propre associé à α_i.

Si deux observables A et B commutent alors il est possible de les mesurer simultanément : le résultat de la mesure de A n'est pas affecté par la mesure de B (et vice versa). Ceci signifie qu'on peut les mesurer l'une après l'autre et que le résultat d'une première mesure de A sera retrouvé à l'identique lors d'une deuxième mesure de A, même si on a procédé à une mesure de B entre les deux. Il est donc possible de considérer que les deux observables ont des valeurs définies simultanément. Ceci n'est pas vrai si A et B ne commutent pas.

4.3 Interférences

L'exemple typique d'interférences en mécanique quantique est donné par la célèbre expérience des deux fentes[18] aussi appelée expérience des trous d'Young. Un faisceau lumineux traverse un diaphragme avec deux fentes parallèles et tombe sur une plaque photographique. On peut y voir un motif typique d'interférences avec une alternance de raies parallèles sombres et claires. Si l'une des fentes est obturée, on verra une raie lumineuse en face de la fente restée ouverte. Ceci est parfaitement compréhensible si on considère que la lumière est constituée d'ondes comme on le suppose en électromagnétisme classique. L'explication est basée sur le fait que lorsque les deux fentes sont ouvertes, le faisceau lumineux se divise en deux parties suivant chacune l'un des deux chemins possibles à travers l'une ou l'autre des fentes et que, lorsqu'il se reconstitue sur la plaque, les deux parties du faisceau se recombinent en interférant constructivement à certains endroits (donnant une raie claire) et destructivement à d'autres endroits (donnant une raie sombre) selon la différence de longueur des trajets parcourus. Mais, si la lumière est constituée de photons assimilés à des particules, le phénomène devient moins aisément explicable. Il est en effet possible de réduire l'intensité du faisceau lumineux de manière à n'avoir qu'un seul photon à la fois dans le faisceau. Dans ce cas, si on observe les

[18] Pour une présentation lumineuse de cet exemple, voir Feynman R., 1980. *La Nature de la Physique*. Paris : Seuil.

fentes pour détecter à travers laquelle passe chaque photon, on constatera que chacun d'entre eux passe par une fente et une seule. Aucun photon ne se coupe en deux pour passer à travers les deux fentes à la fois. On vérifie donc que les photons se comportent bien comme des particules. Mais, avec ce protocole expérimental (consistant à détecter par quelle fente passe chaque électron) on n'observe plus aucune interférence. Si on refait l'expérience en n'observant plus cette fois par quelle fente passe les photons, alors on retrouve les interférences. En résumé, si on observe par quelle fente passent les photons, on constate qu'ils passent chacun par une fente unique mais on n'a plus d'interférences et si on ne regarde plus leur chemin, on retrouve les interférences. Le simple fait d'observer leur chemin détruit les interférences. L'explication donnée par la mécanique quantique est que, lorsqu'on n'observe pas leur trajet, l'état de chaque photon qui arrive sur la plaque photographique est la superposition des états "passé par la fente 1" et "passé par la fente 2". La mesure de position qui est faire alors à l'arrivée se fait dans cet état superposé qui autorise l'apparition d'interférences. Lorsqu'on observe par quelle fente passent les photons, on fait une mesure qui projette l'état de chaque photon dans l'état "passé par la fente 1" ou dans l'état "passé par la fente 2". La superposition est détruite et les interférences ne sont plus possibles.

Annexe 2 : Le dilemme du prisonnier

Imaginons que deux prisonniers, Paul et Jacques, soient enfermés dans des cellules différentes sans moyen de communiquer. Ils ont été arrêtés pour un vol commun. Le gardien vient expliquer à chacun d'eux que, s'il avoue avoir commis le vol avec l'autre (stratégie de dénonciation de l'autre prisonnier) et que l'autre nie leur participation au vol (stratégie de coopération entre les deux prisonniers), il en sera tenu compte et qu'il sera libéré pendant que l'autre écopera de 4 ans de prison, mais que, si l'autre avoue aussi, alors ils écoperont tous les deux de 3 ans. En revanche, s'il nie et que l'autre avoue, c'est lui qui écopera de 4 ans de prison tandis que s'ils nient tous les deux, faute de preuve, ils n'auront chacun qu'un an de prison. Une telle formulation est classique en théorie des jeux et peut se formuler de manière condensée dans le tableau de la figure 3.6 :

	Paul dénonce	Paul coopère
Jacques dénonce	3,3	0,4
Jacques coopère	4,0	1,1

Figure 3.6. *Table des gains dans le dilemme du prisonnier*

Le tableau se lit en regardant le gain respectif de chaque joueur dans la case correspondant au coup de chaque joueur. Si Jacques coopère et Paul dénonce, le gain est 4,0 signifiant que Jacques aura 4 ans de prison et Paul sera libéré. La difficulté du problème vient de ce que la stratégie optimale apparente est peu satisfaisante : il semble que quel que soit le comportement de Jacques, Paul a intérêt à dénoncer. En effet, si Jacques dénonce aussi, Paul aura 3 ans de prison contre 4 s'il avait coopéré et si Jacques coopère, Paul sera libéré au lieu d'avoir 1 an de prison s'il avait coopéré. Pourtant, comme chacun sait que l'autre peut faire le même raisonnement, ils seront donc conduits à dénoncer tous les deux et à écoper de 3 ans de prison chacun alors que s'ils avaient coopéré tous les deux, ils n'auraient eu qu'un an. Le problème se généralise en dilemme itéré dans lequel plusieurs parties successives sont jouées et où la notion de stratégie et d'anticipation de la réaction de l'autre joueur devient importante. On peut s'attendre à ce qu'un joueur de tempérament altruiste ait plutôt tendance à coopérer alors qu'un joueur égoïste va plutôt vouloir dénoncer.

Avertissement

Cet article présente un travail qui a été mené en collaboration avec Shmuel Zamir du Center for the Study of Rationality de l'université de Jérusalem et Ariane Lambert du CERAS à l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées (URA 2036, Paris).
Il a donné lieu à un article préliminaire en anglais : Lambert Ariane, Zamir Shmuel et Zwirn Hervé, 2006. *Type Indeterminacy: A Model of the KT(Kahneman–Tversky)-Man.* arXiv:physics/0604166 v1 20 Apr 2006 et à une soumission au Journal of Economic Theory.

BIBLIOGRAPHIE

Basdevant Jean-Louis, 2006. *12 leçons de mécanique quantique.,* Paris : Vuibert.

Cohen-Tannoudji C., Diu B., et Laloe F., 1973. *Mecanique Quantique.*, Paris : Herman Editeur des Sciences et des Arts.

Feynman R., 1980. *La Nature de la Physique*. Paris : Seuil.

Kahneman D. et Tversky A., 2000. *Choice, Values and Frames*. Cambridge : Cambridge Universtity Press.

Lambert Ariane, Zamir Shmuel et Zwirn Hervé, 2006. *Type Indeterminacy: A Model of the KT(Kahneman–Tversky)-Man.,* arXiv:physics/0604166 v1 20 Apr 2006.

Mackey G.W., 1963. *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics.* New York: Benjamin.

Pruitt D.G., 1970. *Reward Structure of Cooperation: the Decomposed Prisoner's Dilemma Game.,* Journal of Personality and Psychology 7: 21-27.

Selten R., 1998. *Features of Experimentally Observed Bounded Rationality.* European Economic Review: 413-436.

Tversky A. et Simonson I., 1993. «Context-Dependent Preferences». *Management Sciences* 39 : 85-117.